

## АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПЛИТ ЗІ СТАЛЕВИМ ОБРАМЛЕННЯМ

*Наведено послідовність аналітичного розрахунку на основі методу Нав'є залізобетонних плит зі сталевим обрамленням. Розглянуто плиту, оперту по контуру та завантажену в одній точці. Виконано аналіз відповідності результатів розрахунку плити експериментальним даним.*

**Ключові слова:** *плита, сталезалізобетон, арматура, розрахунок, прогин.*

**Вступ.** Важливим напрямом розвитку несучих будівельних конструкцій є пошук нових сполучень бетону і сталі, при яких вони за умови їх спільної роботи сприймали б максимально можливі зусилля. Сталезалізобетонні конструкції набули надзвичайно широкого розповсюдження та застосування, зокрема у конструкціях перекриттів. Залізобетонні плити зі сталевим обрамленням, що входять до складу сталезалізобетонного перекриття потребують аналітичної методики розрахунку.

**Огляд останніх джерел досліджень і публікацій.** Відомо, що сталезалізобетонні конструкції являють собою сполучення армованого стрижневою арматурою залізобетону та сталевих профілів. У роботі О.В. Нижника [1] наведено сталезалізобетонні плоскі перекриття, елементами яких є залізобетонні плити з обрамленням сталевими кутиками. В Україні введено в дію нормативний документ [2], присвячений проектуванню сталезалізобетонних конструкцій, при розробленні якого враховані основні положення Eurocode 4. Початок створенню теорії розрахунку пластин, опертих по контуру, як одного з розділів теорії пружності, покладено працями Кірхгофа, Лява, Нав'є. Значний внесок у розвиток розрахунку пружних пластин зробили М.І. Безухов [3], І.Г. Бубієв, Б.Г. Галеркін, Б.Н. Жемочкін, С.П. Тимошенко [4] й інші. За кордоном розрахунок плит, опертих по контуру розробляли А. Нільсон [5], Ф. Джавад [6], Р. Вуд, К. Йогансен, К. Кемп, Р. Парк, Б. Хейс та інші. Більшість існуючих нормативних документів для звичайних випадків розрахунку плит із перехресною арматурою рекомендують наближені формули, що виводяться на основі деяких припущень. Так, плиту, яка спирається по всьому периметру та оснащена перехресною арматурою, можна розглядати такою, що складається з двох перехресних плит, які працюють сумісно, з арматурою одного напрямку в кожній. У такому випадкові розподілення навантаження (на одиницю площі) на кожну з плит, що приймаються з прольотами, наближено можна розраховувати з умови рівності прогинів двох смуг, що взаємно перехрещуються в центрі плити [7].

**Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми.** Залізобетонні плити зі сталевим обрамленням потребують більш точного розрахунку, як окремі елементи збірного сталезалізобетонного перекриття [1].

**Постановка завдання.** Метою статті є створення алгоритму аналітичного розрахунку залізобетонних плит зі сталевим обрамленням, опертих по контуру.

**Основний матеріал і результати.** Наявність сталевих обрамлень впливає на роботу плити шляхом перерозподілу внутрішніх напружень та зусиль. Сталеве обрамлення утворює жорстку раму, що сприймає зусилля кручення й згину в поперечному напрямку, яке виникає від деформації країв плити.

Оскільки довжини міжколонних плит можуть бути різними, то величини рівномірно розподілених навантажень також різняться за значеннями. У загальному випадку доцільно проектувати надколонні плити (рис. 1) квадратними в плані.

Для визначення впливу кутика на загальну роботу плити розглянемо схему деформованої плити (рис. 2).

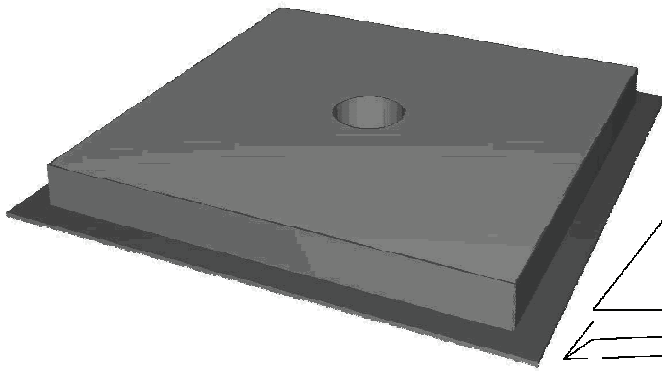


Рисунок 1 – Надколонна плита

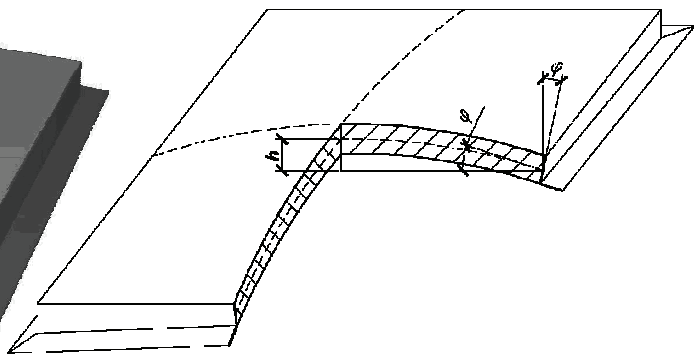


Рисунок 2 – Схема деформованої надколонної плити

Для визначення крутильного моменту, який сприймає кутик, запишемо рівняння сумісності деформацій. Кут повороту торця плити буде дорівнювати куту повороту кутика

$$\varphi_{плит} = \varphi_{кут} . \quad (1)$$

Кут повороту кутика відповідно знаходиться з виразу

$$\varphi_{кут} = \frac{M_{кр} x}{GI_{к}} , \quad (2)$$

де  $M_{кр}$  – крутильний момент, який необхідно визначити;  $G$  – модуль пружності другого роду для сталі;  $J_{к}$  – крутильний момент інерції;  $x$  – координата по довжині плити,  $x \in [0; l/2]$ .

Оскільки кутик фактично утворює симетричну раму з жорсткими вузлами, то при врахуванні кручення можна вважати кутик затиснутим з обох боків (рис. 3, 4).

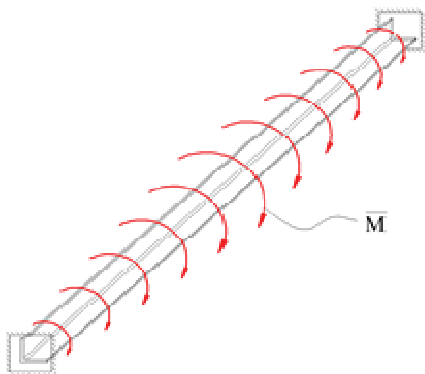


Рисунок 3 – Розрахункова схема кутика

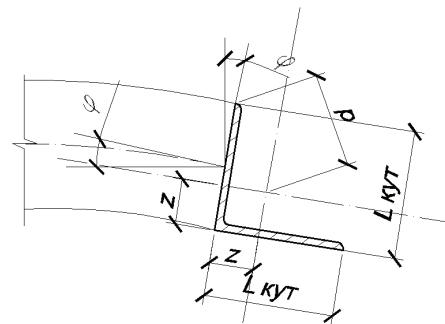


Рисунок 4 – Схема деформованого кутика

Для визначення кута повороту торця розглянемо надколонну плиту, що спирається на колону і передає на неї все навантаження від перекриття. Розрахункову схему такої плити можна подати у вигляді пластини, що оперта шарнірно та завантажена зосередженою силою (рис. 5).

Скористаємося підходом Нав'є. Для розв'язання такої задачі представимо функцію прогинів у вигляді

$$\omega_{(y=0)} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{m^3} . \quad (3)$$

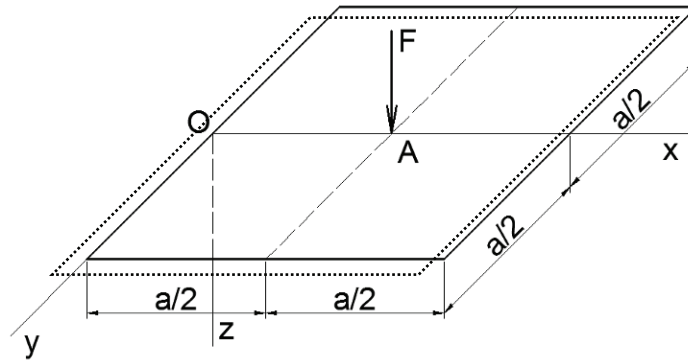


Рисунок 5 – Розрахункова схема надколонної плити

Відповідно до розв'язку Нав'є

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}. \quad (4)$$

$$D = \frac{h_0 z_1}{\left( \frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{(\gamma' + \xi) h_0 E_{cd} \mu} \right) 0.9(1-\nu^2)}, \quad (5)$$

де  $\xi$  – відносна висота стисненої зони, що визначається за формулою

$$\xi = \frac{(f_{yd} A_s - f'_{yd} A'_s)}{f_{cd} h_0}, \quad (6)$$

якщо при цьому  $\xi \leq \frac{a'}{h_0}$ , то слід приймати  $\xi = \frac{2a'}{h_0}$ ;

$z_1$  – відстань від центра ваги площі перерізу розтягнутої арматури до точки прикладання рівнодіючої зусиль у стисненій зоні перерізу над тріщиною, визначається за формулою

$$z_1 = h_0 \left[ 1 - \frac{\frac{2a'}{h_0} \gamma' + \xi^2}{2(\gamma' + \xi)} \right], \quad (7)$$

$$\gamma' = \frac{E_s A_s}{2\mu E_{cd} h_0 b};$$

$\mu$  – коефіцієнт, що характеризує пружно-пластичний стан бетону стисненої зони і приймається 0,1 при вологості зовнішнього середовища, меншій ніж 40%;  $b$  – ширина перерізу;  $h_0$  – робоча висота перерізу;  $a'$  – відстань від рівнодіючої зусиль у стисненій арматурі до ближньої грані перерізу;  $f_{yd}$  і  $f'_{yd}$  – розрахункові опори сталі розтягу та стиску відповідно;  $A_s$  й  $A'_s$  – площа перерізу розтягнутої та стисненої арматури відповідно на одиницю довжини перерізу;  $E_s$  – модуль пружності арматури;  $f_{cd}$  – розрахунковий опір бетону осьовому стиску.

Маючи функцію прогинів плити, можна визначити кути повороту торців плити

$$\varphi(x)_{плити} = \frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2 \alpha_m} \right) \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{m^2}. \quad (8)$$

Представимо

$$\alpha = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)}{m^2}, \quad (9)$$

тоді 
$$\varphi(x)_{num} = \frac{Pa}{2\pi^2 D} \cdot \alpha. \quad (10)$$

З умови сумісності деформацій при  $x=a$  отримаємо, що

$$\frac{M_{кр}(y+a/2)^2}{aGI_p} = \frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \frac{\sin\frac{m\pi}{2} \cos(m\pi)}{m^2}. \quad (11)$$

Таким чином, можна отримати вираз для крутильного моменту

$$M_{кр} = \frac{Pa^2 GI_p}{2\pi^2 D(y+a/2)^2} \cdot \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \frac{\sin\frac{m\pi}{2} \cos(m\pi)}{m^2}. \quad (12)$$

Максимальний згинальний момент у прольоті плити знаходимо з різниці згинальних моментів

$$M_{MAX} = M_{прол.} - M_{кр}, \quad (13)$$

де  $M_{прол.}$  – розрахунковий момент у плиті без урахування роботи кутика;  
 $M_{кр}$  – розрахунковий момент, який сприймається кутиком.

$$M_{хпрол} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), M_{упрол} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (14)$$

Коефіцієнт Пуассона  $\nu$  може прийматися таким, що дорівнює 0,2, при рівні напружень, які не перевищують  $0,5 f_{cd}$  для бетону без тріщин, і таким, що дорівнює 0, для бетону з тріщинами.

$$M_{MAX} = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \sin\frac{m\pi x}{a} - \frac{Pa^2 GI_p}{2\pi^2 D(y+\frac{a}{2})^2} \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \frac{\sin\frac{m\pi}{2} \cos(m\pi)}{m^2} \quad (15)$$

Проінтегрувавши рівняння (15), отримаємо рівняння кутів повороту, а також рівняння прогинів для сталезалізобетонних зразків

$$\varphi(x) = \frac{1}{D} \int \left( \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \sin\frac{m\pi x}{a} - \frac{Pa^2 GI_p}{2\pi^2 D(y+\frac{a}{2})^2} \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \frac{\sin\frac{m\pi}{2} \cos(m\pi)}{m^2} \right) dx = \frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2\alpha_m} \right) \left( \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m^2} \right) \left( -\cos(\alpha_m x) - \frac{aGI_p}{D(y+\frac{a}{2})^2} \cos(m\pi) \right) + C \quad (16)$$

де  $C$  – постійна величина, визначається, виходячи з граничних умов:  $x=a/2, y=0, \varphi=0$ .

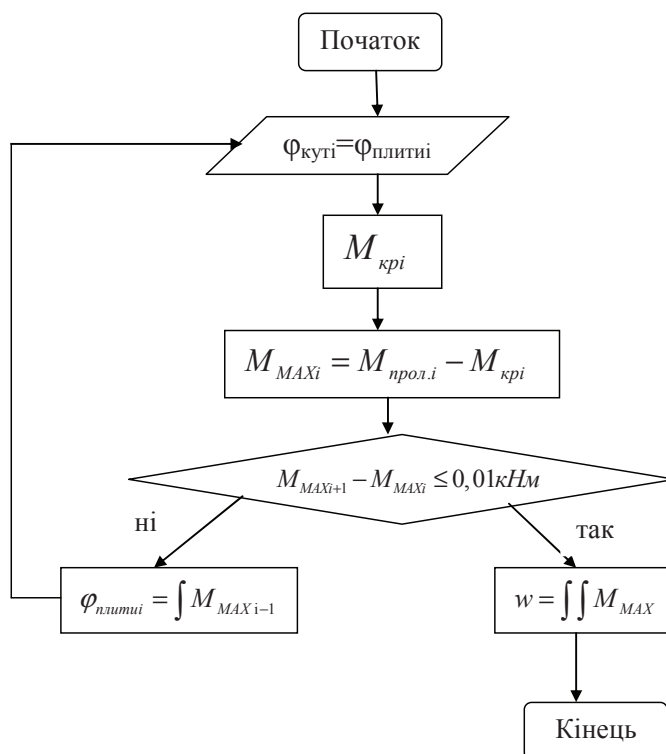
$$C = \frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2 \alpha_m} \right) \left( \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2} \right) \left( \cos \left( \frac{m\pi}{2} \right) + \frac{4GI_p}{Da} \cos(m\pi) \right)$$

де F – постійна величина, визначається, виходячи з граничних умов:  $x=a, y=0, w=0$ .

$$w(x, y) = \frac{1}{D} \iint \left( \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2 \alpha_m} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} - \frac{Pa^2 GI_p}{2\pi^2 D(y+a/2)^2} \right. \\ \left. \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2 \alpha_m} \right) \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \cos(m\pi)}{m^2} \right) dx^2 = \quad = \quad (17) \\ \frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2 \alpha_m} \right) \left( \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2} \right) \left( -\frac{\sin(\alpha_m x)}{\alpha_m} - \frac{aGI_p}{D(y+a/2)^2} \cos(m\pi) \right) + Cx + F$$

$$F = \frac{Pa}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( th\alpha_m - \frac{\alpha_m}{ch^2 \alpha_m} \right) \left( \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2} \right) \left( \frac{\sin(m\pi)}{\alpha_m} + \frac{4GI_p}{Da} \cos(m\pi) \right) - Ca$$

Для більш точних розрахунків слід використати метод послідовного наближення за блок-схемою на рисунку 6.



**Рисунок 6 – Блок-схема уточненого розрахунку залізобетонних плит зі сталевим обрамленням**

Арматура в плиті розраховується відповідно до діючих нормативних документів. Результати порівняння результатів розрахунку з експериментальними даними для зразка надколонної плити ПН50-1 представлено у таблиці 1.

**Таблиця 1 – Порівняльний аналіз результатів розрахунку**

Марка зразка	Mmax, кНм	M за експ. даними, кНм	Δ, %	Прогин за аналітичним розрахунком, мм	Прогин за експ. даними, мм	Δ, %
ПН50-1	0,79	0,82	3,7	28,9	27,5	4,9

**Висновки.** Результати аналітичного розрахунку зразка ПН50-1 за допомогою запропонованої методики збігаються з результатами експериментальних досліджень у межах 4,9%, тобто вона з високою точністю оцінює міцність та деформативність залізобетонних плит зі сталевим обрамленням.

#### Література

1. Нижник, О.В. Безбалкові та часторебристі сталезалізобетонні перекриття [Текст]: автореферат дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.01 / О. В. Нижник; Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка. – Полтава : [б. и.], 2012. – 40 с.
2. ДБН В.2.6-160:2010 Сталезалізобетонні конструкції. Основні положення. – Київ, Мінрегіонбуд України, 2011. – 55 с.
3. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1961. – 540 с.
4. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 807 с.
5. Nilson, A. H. Deflections of Two-Way Floor Systems by the Equivalent Frame Method // ACI Journal Proc. – 1975. Vol. 72, № 5. – P. 210 – 218.
6. Jawad, F. A. Long-Term Deflection of Two-Way Slabs with Particular Focus on Iraqi Practice M.Sc. Thesis, College of Engineering, University of Mustansiriyah, Baghdad, Iraq. Feb. 2000. – 143 p.
7. Стороженко, Л.І. Сталезалізобетонні конструкції [Текст] / Л.І. Стороженко, О.В. Семко, В.Ф. Пенц. – Полтава: ПолтНТУ, 2005. – 181 с.

О.В. Клестов, ассистент

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ СО СТАЛЬНЫМ ОБРАМЛЕНИЕМ

Приведена последовательность аналитического расчета на основе метода Навье железобетонных плит со стальным обрамлением. Рассмотрена плита, опертая по контуру и нагруженная в одной точке. Проведен анализ соответствия результатов расчета плиты экспериментальным данным.

**Ключевые слова:** плита, сталежелезобетон, арматура, расчет, прогиб.

O.V. Klestov, Assistant

Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University

## ANALYTICAL CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE SLABS WITH STEEL FRAMING

The succession of analytical calculation of reinforced concrete slabs with steel framing supported around the periphery which based on Navier's method is shown. The two-way slab loaded in one point is being viewed in this article. The analysis of accordance the results of calculation of slab to experimental data has been carried.

**Keywords:** slab, composite structures of steel and reinforced concrete, reinforcement, calculation, deflection.

Надійшла до редакції 21.10.2014

© О.В. Клестов