

## ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОНУ ТА КРИТЕРІЇ ВИЧЕРПАННЯ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ І КОНСТРУКЦІЙ

*Розв'язано задачу з прогнозування максимально можливих деформацій стиснутого бетону в залізобетонних елементах і конструкціях на момент порушення їх граничної рівноваги. Отримано універсальну залежність для прогнозування граничних деформацій стиснутого бетону в бетонних та залізобетонних елементах і конструкціях.*

**Ключові слова:** граничні деформації, несуча здатність, залізобетон.

**Вступ.** В основу переважної більшості сучасних нормативних документів із проектування бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій [1 - 4] закладені так звані деформаційні моделі їх перерізу, що ґрунтуються на використанні у розрахунках зазначених елементів повних діаграм деформування стиснутого бетону. За ними вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів і конструкцій обмежується декількома критеріями:

– втратою рівноваги між внутрішніми та зовнішніми зусиллями (за екстремальним критерієм міцності  $dM / d(1/\rho) = 0$  або  $dN / d\varepsilon_c = 0$ );

– руйнуванням стиснутого бетону за граничних деформацій крайніх фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$ ;

– розривом усіх розтягнутих стержнів унаслідок досягнення в них граничних деформацій  $\varepsilon_{ud}$ .

Детальний аналіз напружено-деформованого стану бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій дозволяє говорити про те, що за більш коректного формулювання першого з указаних критеріїв потреба у застосуванні двох інших загалом відпадає. До того ж реалізація останнього критерію в елементах і конструкціях, що армовані вздовж периметра перерізу або зазнають косоного стиску чи косоного згину, взагалі є сумнівною.

**Огляд останніх джерел досліджень і публікацій.** Особлива увага до критеріїв вичерпання несучої здатності бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій у так званих сучасних деформаційних моделях їх перерізу [5 - 7] є цілком зрозумілою. Однак у роботі [7] вже було частково обґрунтовано й показано, що лише параметр  $dM / d(1/\rho) = 0$  можна розглядати як єдиний універсальний та узагальнений критерій вичерпання несучої здатності бетонних й залізобетонних елементів і конструкцій, оскільки він прямо характеризує порушення граничної рівноваги між внутрішніми та зовнішніми зусиллями вказаних елементів та «поглинає» всі інші критерії, задекларовані в нормах [4].

**Постановка завдання.** Основним недоліком усіх нинішніх деформаційних моделей бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій є спроба задекларувати як критерії вичерпання їх несучої здатності граничні значення відносних деформацій відповідних матеріалів: бетону  $\varepsilon_{cu}$  чи арматури  $\varepsilon_{ud}$ . Але аналіз напружено-деформованого стану бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій показує, що в основу відомих на сьогодні деформаційних моделей, так само як і в основу колишніх силових, закладено одну й ту ж саму гіпотезу граничної рівноваги. А тому цілком очевидно, що критерії вичерпання несучої здатності в першу чергу варто пов'язувати з вищевказаною гіпотезою.

Відомо, що будь-які процеси, явища або події відбуваються за загальними законами, в основі яких лежать певні причинно-наслідкові зв'язки. Процес деформування бетонних чи залізобетонних елементів та конструкцій зазвичай відображається діаграмами їх стану  $M - (1/\rho)$ ,  $N - \varepsilon$ . У подібних зв'язках (залежностях) зусилля завжди виступають

причинами, а кривина і деформації – лише наслідками деформування. Тому цілком очевидно, що причинами настання граничного стану (втрати несучої здатності через порушення рівноваги зусиль) можуть бути лише силові параметри. Але варто застерегти, що, на відміну від колишньої силової моделі напруження в матеріалах не можуть виступати як такі параметри.

Таким чином, точність відображення чи відтворення реального напружено-деформованого стану бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій слід пов'язувати не з деформаційною чи силовою моделлю їхнього перерізу, а з узагальненою моделлю їх деформування, яка за своєю сутністю завжди є деформаційно-силовою.

Стаття має на меті розв'язання завдання з прогнозування максимально можливих деформацій стиснутого бетону в залізобетонних елементах і конструкціях на момент порушення їх граничної рівноваги. Це у свою чергу дозволить не тільки прогнозувати граничну несучу здатність зазначених елементів, але й визначати їх найважливіші експлуатаційні параметри: прогини, крок та ширину розкриття тріщини тощо.

**Основний матеріал і результати.** Спробуємо обґрунтувати, чому граничні деформації крайніх фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  принципово не можуть виступати критерієм вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів та конструкцій. І тут основним аргументом може слугувати сама діаграма деформування бетону  $\sigma_c - \varepsilon_c$ , а ще точніше - її характер.

У колишній силовій моделі напруження в бетоні могли виступати критерієм вичерпання несучої здатності лише тому, що вони могли сягати екстремальних значень. Однак у так званій «деформаційній» моделі деформації такою властивістю не наділені. Крім того, відомим є і той факт, що на момент вичерпання несучої здатності залізобетонних елементів і конструкцій величина граничних деформацій стиснутого бетону навіть для одного й того ж самого класу бетону за різних вихідних умов не залишається фіксованою та коливається в доволі широких межах. Тому цілком очевидно, що основна увага повинна бути прикута саме до тих вихідних умов або параметрів, які у найбільшою мірою спричиняють неоднорідність деформування бетону в перерізі залізобетонних елементів і конструкцій.

Загалом відомо, що центрально стиснутий бетонний елемент завжди перебуває в однорідному напружено-деформованому стані. А тому зрозуміло, що при його руйнуванні граничні деформації стиснутого бетону завжди сягатимуть лише критичних величин  $\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{c1}$ . Перевищення граничними деформаціями бетону вищезгаданих критичних величин стає реальним лише тоді, коли в перерізі елемента залишатимуться волокна, здатні перебирати на себе додаткові зусилля від розвантаження найбільш деформованих фібр бетону. А це можливо лише у двох випадках:

– за наявності в перерізі елемента арматурних стержнів з власними критичними деформаціями, що перевищують критичні деформації бетону  $\varepsilon_{so} > \varepsilon_{c1}$ ;

– за неоднорідного деформування волокон самого бетону в перерізі бетонного або залізобетонного елемента при плоскому чи косому згині, при позацентровому чи косому стискуві.

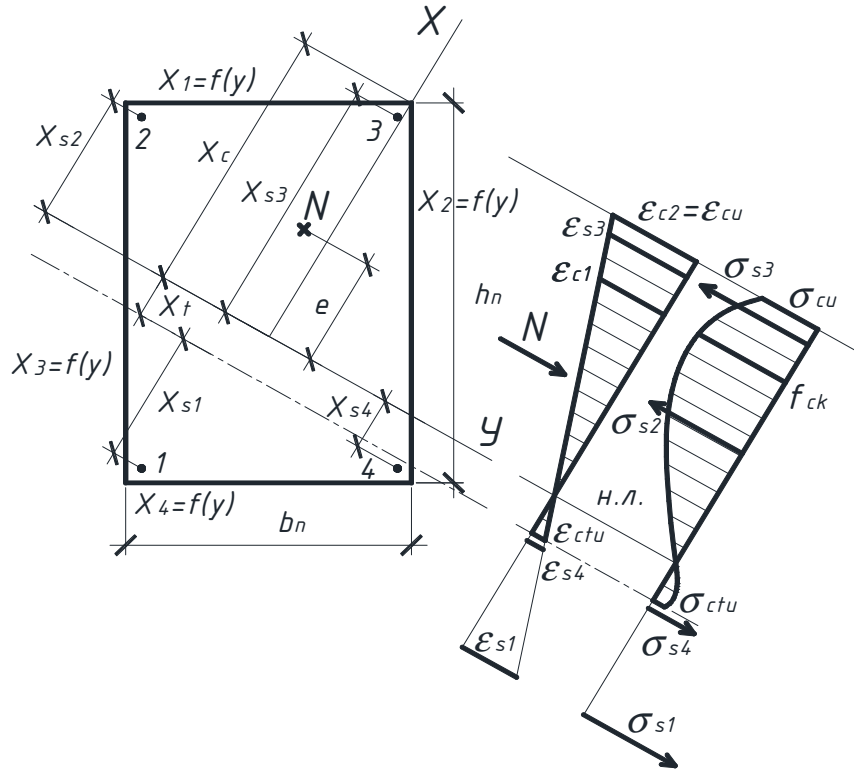
Зі сказаного випливає, що граничні деформації крайніх фібр стиснутого бетону  $\varepsilon_{cu}$  найбільшою мірою є залежними від виду напружено-деформованого стану та параметрів армування залізобетонного елемента. Аби перевірити таке припущення, запишемо рівняння рівноваги залізобетонного елемента для загального випадку його деформування – косоного стиску (рис.1)

$$N = \int_{x=0}^x \sigma(x) dx + \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \sigma(x) dx - \int_{x=0}^{x-b_n \cdot \sin \theta} \sigma(x) dx + \int_{x_1(y)}^{x_3(y)} \sigma(x) dx + \int_{x_t=0}^{x_t} \sigma(x_t) dx_t + \int_{x_{t3}(y)}^{x_{t2}(y)} \sigma(x_t) dx_t + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot A_{si}; \quad (1)$$

$$N \cdot e = \int_{x=0}^x \sigma(x) \cdot x dx + \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \sigma(x) \cdot x dy - \int_{x=0}^{x-b_n \cdot \sin \theta} \sigma(x) \cdot x dx + \int_{x_1(y)}^{x_3(y)} \sigma(x) \cdot x dy + \int_{x=0}^{x_t} \sigma(x_t) dx_t \cdot x_t + \int_{x_{t3}(y)}^{x_{t2}(y)} \sigma(x_t) dx_t \cdot x_t + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} \cdot A_{si} \cdot x_{si}, \quad (2)$$

де  $\theta$  - кут нахилу нейтральної лінії до ширини перерізу елемента  $b_n$ ;

$A_{si}$  - площа поперечного перерізу окремого арматурного стержня.



**Рисунок 1 – Напружено-деформований стан перерізу косостиснутого залізобетонного елемента**

При дослідженні граничних деформацій бетону за допомогою залежностей (1) і (2) скористаємося рядом гіпотез:

– зв'язок між напруженнями та деформаціями стиснутого бетону описуватимемо повними діаграмами його деформування у вигляді неправильної дробово-раціональної функції [8]

$$\sigma_c = (a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2) / (1 + c \cdot \varepsilon_c), \quad (3)$$

$$\text{де } a = E_{co}; \quad b = f_c / \varepsilon_{c1}^2; \quad c = E_{co} / f_c - 2 / \varepsilon_{c1}; \quad (4)$$

– в граничному стані впливом розтягнутого бетону на несучу здатність залізобетонного елемента знехтуємо;

– зв'язок між напруженнями та деформаціями арматури приймемо у вигляді діаграми Прандтля, а за відсутності фізичної межі текучості описуватимемо лінійно-параболічною функцією [6];

– при деформуванні залізобетонних елементів для їх осереднених перерізів вважатимемо справедливою гіпотезу плоских перерізів

$$1 / \rho = \varepsilon_{c2} / x = \varepsilon_{si} / x_{si}; \quad \text{або } 1 / \rho = (\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{si}) / d_i = (\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{si}) / (x - x_{si}); \quad (5)$$

– несуча здатність елемента та опір його розрахункового перерізу діючим навантаженням вважається вичерпаним при порушенні відповідних умов рівноваги.

З урахуванням вищевказаних гіпотез залежності (1) і (2) набудуть такого вигляду

$$N = \frac{1}{1/\rho} \int_{\varepsilon_{co}}^{\varepsilon_{c2}} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{y \cdot \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{c2} / (1/\rho)}^{-y \cdot \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{c2} / (1/\rho)} dy - \int_{\varepsilon_{co}}^{\varepsilon_{c2} - 1/\rho \cdot b_n \cdot \sin \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c - b \cdot \varepsilon_c^2}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{y \cdot \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{c2} / (1/\rho) - b_n / \sin \theta}^{-y \cdot \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{c2} / (1/\rho) - b_n / \sin \theta} dy + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si}; \quad (6)$$

$$N \cdot e = \frac{1}{(1/\rho)} \left( \int_{\varepsilon_{co}}^{\varepsilon_{c2}} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} \frac{d\varepsilon_c}{(1/\rho)} \int_{y \cdot \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{c2} / (1/\rho)}^{-y \cdot \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{c2} / (1/\rho)} dy - \int_{\varepsilon_{co}}^{\varepsilon_{c2} - 1/\rho \cdot b_n \cdot \sin \theta} \frac{a \cdot \varepsilon_c^2 - b \cdot \varepsilon_c^3}{1 + c \cdot \varepsilon_c} d\varepsilon_c \int_{y \cdot \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{c2} / (1/\rho) - b_n / \sin \theta}^{-y \cdot \operatorname{tg} \theta + \varepsilon_{c2} / (1/\rho) - b_n / \sin \theta} dy \right) + E_s \cdot \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \varepsilon_{si} \cdot \varepsilon_{si}(\rho), \quad (7)$$

де  $b_n$  і  $h_n$  - ширина та висота перерізу елемента;

$\varepsilon_{c2}$  і  $\varepsilon_{co}$  - граничні деформації найбільш та найменш стиснутих волокон бетону в перерізі;

$\varepsilon_{si}$  - відносні деформації арматури, обмежені межею текучості  $\varepsilon_{so}$ ;

$\varepsilon_{si}(\rho)$  - відносні деформації арматури за гіпотезою плоских перерізів (за кривиною елемента без обмеження межею текучості);

$E_s$  - модуль пружності арматури.

У момент вичерпання несучої здатності, коли

$$M(1/\rho) \Big|_{1/\rho=1/\rho_u} = \max, \quad (8)$$

граничні деформації бетону в залізобетонному елементі знайдемо з рівняння (7), застосувавши до нього поняття екстремального критерію несучої здатності  $dM/d(1/\rho) = 0$ .

Точний розв'язок рівняння (7) після його інтегрування є надзвичайно

складним і практично навіть неможливим унаслідок появи в ньому так званих радикалів. Для загального випадку деформування залізобетонних елементів його вдалося виразити за допомогою методів числового аналізу з достатньо високим ступенем наближення (достовірністю  $R^2 = 0,998$ ) такою залежністю:

$$\eta_{eu} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1} = 1 + 5^3 \cdot \alpha_s \cdot \frac{(k-1)}{(6-k)} \cdot \sum_{i=1}^n \rho_{li} \cdot \left( \frac{x_{si}}{x} \right)^2 + \beta_F \times \left[ \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_h)^2)(1 - m_h^{3/2})(1 - m_h/k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m_h^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_h^2)(k-2) \ln(6/k - 0,2))^2} + \frac{(0,43 - 0,2(0,4 - m_b)^2)(1 - m_b^{3/2})(1 - m_b/k) \sqrt{(\ln k)^{(1 - m_b^{3/2})}}}{1 + ((1/6 - 0,1m_b^2)(k-2) \ln(6/k - 0,2))^2} \right], \quad (9)$$

де  $m_h$  - параметр неоднорідності деформування стиснутого бетону вздовж сторони  $h$  (рис. 2),  $m_h = \varepsilon_{co,h} / \varepsilon_{c2}$ ;

$m_b$  - параметр неоднорідності деформування стиснутого бетону вздовж сторони  $b$ ,  $m_b = \varepsilon_{co,b} / \varepsilon_{c2}$ ;

$\eta_{Eu}$  - рівень граничних деформацій найбільш стиснутих волокон бетону в перерізі;  
 $\alpha_s$  - відносне значення модуля пружності використаної арматури,  $\alpha_s = E_s / 200000$  ;  
 $x_{si}$  - відстані від нейтральної лінії до центра ваги поздовжніх стержнів, напруження в яких у граничному стані не досягають межі текучості;

$\rho_{li}$  - коефіцієнт армування перерізу елемента тими ж стержнями,  $\rho_{li} = A_{si} / (b_n \cdot h_n)$  ;

$\beta_F$  - коефіцієнт, що залежить від виду напружено-деформованого стану елемента: для стиснутих елементів він приймається таким, що дорівнює  $\beta_F = 1,0$  ; для згинальних –  $\beta_F = 0,81$  .

Варто зауважити, що залежність (9) отримана для бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій прямокутного перерізу за довільної форми їх стиснутої зони (рис. 2), а тому може бути використана у узагальненій моделі деформування зазначених елементів.

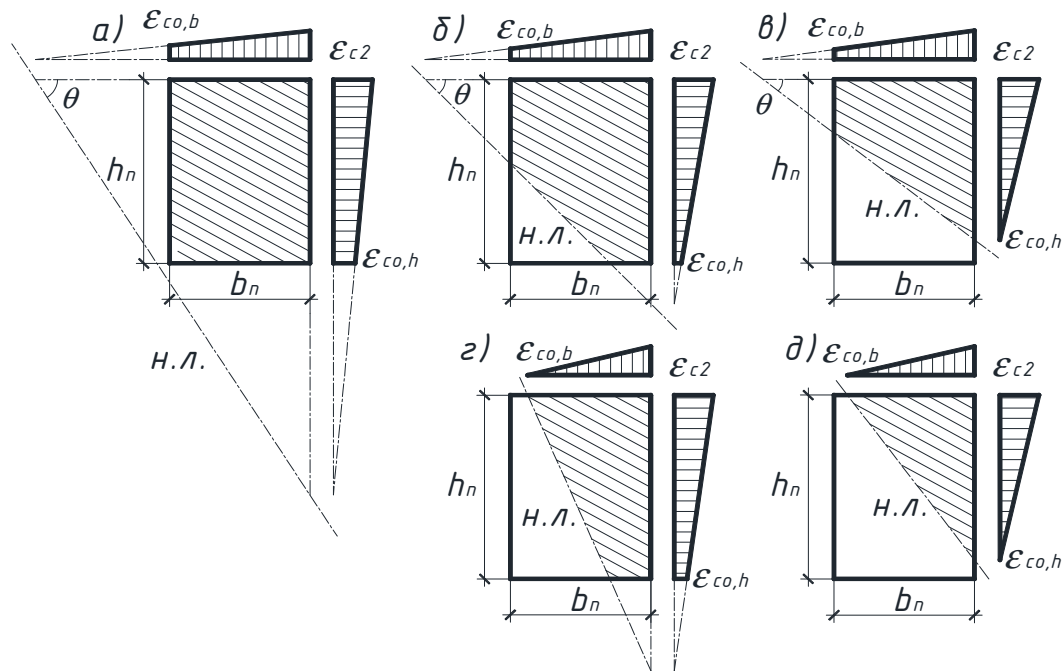
Для залізобетонних елементів, що зазнають деформування в одній площині з досягненням межі текучості в усіх арматурних стержнях в граничному стані, залежність (9) спрощується до простого вигляду:

– при позацентровому стиску

$$\eta_{Eu} = 1 + 0,398 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k-2) / 6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2]; \quad (10)$$

– при плоскому згинанні

$$\eta_{Eu} = 1 + 0,318 \cdot \sqrt{\ln k} / [1 + ((k-2) / 6 \cdot \ln(6/k - 0,2))^2]. \quad (11)$$



**Рисунок 2 – До визначення площі перерізу стиснутого бетону в косостиснутому залізобетонному елементі**

Загалом формулу (9) можна вважати універсальною, бо вона дозволяє прогнозувати граничні деформації бетону в бетонних та залізобетонних елементах і конструкціях незалежно від виду деформування. Обчислені за нею значення граничних деформацій (табл. 1) повністю узгоджуються з дослідженнями А.М. Павлікова, отриманими для згинальних елементів [6].

**Таблиця 1 – Граничні деформації бетону  $\varepsilon_{cu}$  в бетонних та залізобетонних елементах за різних видів їх деформування**

Напружено-деформований стан елемента	Рівень граничних деформації стиснутого бетону $\eta_{eu} = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1}$ за характеристики $k = E_{co} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{ck}$								
	5	4,5	4	3,5	3	2,5	2	1,5	1,1
<b>Плоский згин:</b> формула (9)	1,409	1,394	1,377	1,357	1,335	1,307	1,268	1,203	1,094
Павліков А.М. [6]	1,412	1,398	1,382	1,363	1,339	1,309	1,27	1,2	1,075
Позацентричний стиск	1,505	1,487	1,465	1,441	1,413	1,379	1,331	1,25	1,116
<b>Косий згин:</b> (рис. 2,д), формула (9)	1,818	1,789	1,753	1,714	1,669	1,615	1,537	1,406	1,187
Павліков А.М. [6]	1,83	1,81	1,78	1,74	1,7	1,64	1,546	1,4	1,1
Косий стиск (рис. 2,д)	2,01	1,974	1,93	1,881	1,826	1,759	1,663	1,501	1,231

Виходячи з детального аналізу проведених досліджень, можна зробити такі **висновки**:

– номінальні значення граничних деформацій стиснутого бетону залежать від напружено-деформованого стану бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій, а тому в розрахунках повинні обмежуватися за екстремальним критерієм несучої здатності  $dM / d(1/\rho) = 0$ ;

– параметр  $dM / d(1/\rho) = 0$  може виступати узагальненим критерієм вичерпання несучої здатності бетонних та залізобетонних елементів і конструкцій, оскільки він «поглинає» всі інші критерії, задекларовані в нормах [4];

– чим вищим є ступінь неоднорідності деформування бетону, тим більшими є його граничні деформації  $\varepsilon_{cu}$  в перерізі бетонного чи залізобетонного елемента.

#### Література

1. Eurocode-2: Design of Concrete Structures. – Part 1-1: General Rules and Rules for Building: EN 1992-1-1. – [Final Draft, December, 2004]. – Brussels: CEN. – 2004. – 225 p. – (Європейський стандарт).
2. Конструкции бетонные и железобетонные / Минстройархитектуры Республики Беларусь: СНБ 5.03.01-02. – [Введ. 01.07.03]. – Мн.: Минстройархитектуры, 2003. – 139 с. – (Національний стандарт Білорусії).
3. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры / Госстрой России: СП 52–101–2003. – [Введ. 01.03.04]. – М.: ЦПП НИИЖБ, 2004. – 53 с. – (Національний стандарт Російської Федерації).
4. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування / Мінрегіонбуд України: ДСТУ Б В.2.6-156: 2010. – [Чинний від 01.06.11]. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 123 с. – (Національний стандарт України).
5. Бамбура А.М. Експериментальні основи прикладної деформаційної теорії залізобетону: автореф. дис. д-ра техн. наук / А.М. Бамбура. – Харків: ХДТУБА, 2006. – 39 с.
6. Павліков А. М. Нелінійна модель напружено-деформованого стану косо завантажених залізобетонних елементів у закритичній стадії: монографія / А. М. Павліков. – Полтава: ПолтНТУ ім. Юрія Кондратюка, 2007. – 259 с.
7. Ромашко В.М. Узагальнений критерій вичерпання несучої здатності залізобетонних та сталезалізобетонних елементів і конструкцій / В.М. Ромашко // Зб. наук. праць:

Галузеве машинобудування, будівництво. – Вип. 3 (33). – Полтава: ПНТУ, 2012. – С. 202–206.

8. Ромашко В.М. Жорсткість та модуль деформації бетону в деформаційній моделі / В.М. Ромашко / Бетон и железобетон в Украине. –2007.–№ 6. –С.2-6.

*В.Н. Ромашко, к.т.н., доц.*

*Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно*

## **ДЕФОРМИРОВАНИЕ БЕТОНА И КРИТЕРИИ ИСЧЕРПАНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И КОНСТРУКЦИЙ**

*Решена задача по прогнозированию максимально возможных деформаций сжатого бетона в железобетонных элементах и конструкциях на момент нарушения их предельного равновесия. Получена универсальная зависимость для прогнозирования предельных деформаций сжатого бетона в бетонных и железобетонных элементах и конструкциях.*

**Ключевые слова:** предельные деформации, несущая способность, железобетон.

*V. Romashko, Ph. D., Associate Professor*

*National University of Water Management and Nature Recourses Use, Rivne*

## **THE CONCRETE DEFORMATION AND THE CRITERION OF THE BEARING STRENGTH EXHAUSTING OF REINFORCE-CONCRETE ELEMENTS AND STRUCTURES**

*The task of predicting the maximum possible compression strain of concrete in reinforced concrete structures at the time of the violation of their limit equilibrium is solved. A universal dependence is obtained for the limit deformations forecasting of the compressed concrete in concrete and reinforce-concrete elements and structures.*

**Keywords:** limit deformations, bearing strength, reinforced concrete.

*Надійшла до редакції 12.10.2014*

*© В.М. Ромашко*