

*В.П. Чичулін, к.т.н., доцент
К.В. Чичуліна, к.т.н., ст. викладач*

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК БУДИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Наведено деякі особливості визначення коефіцієнта парної кореляції. Обґрунтовано врахування взаємозв'язку елементів при визначенні ймовірності безвідмовної роботи будівельних конструкцій. Визначено, що надійність системи послідовно з'єднаних елементів збільшується з урахуванням коефіцієнта парної кореляції. Отримано формули визначення лінеаризованої функції ймовірності безвідмовної роботи з урахуванням коефіцієнта узагальненої коваріації, а також ступеневої залежності ймовірності відмови від коефіцієнта парної кореляції.

Ключові слова: коефіцієнт кореляції, ймовірність відмови, ймовірність безвідмовної роботи, система, елемент, відмова, залежність, незалежність.

*В.П. Чичулін, к.т.н., доцент
К.В. Чичуліна, к.т.н., ст. преподаватель*

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

АНАЛИЗ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Приведены некоторые особенности определения коэффициента парной корреляции. Обоснован учет взаимосвязи элементов при определении вероятности безотказной работы строительных конструкций. Определено, что надежность системы последовательно соединенных элементов увеличивается с учетом коэффициента парной корреляции. Получены формулы определения линейризованной функции вероятности безотказной работы с учетом коэффициента обобщенной ковариации, а также степенной зависимости вероятности отказа от коэффициента парной корреляции.

Ключевые слова: коэффициент корреляции, вероятность отказа, вероятность безотказной работы, система, элемент, отказ, зависимость, независимость.

*V. Chichulin, PhD, Associate Professor
K. Chichulina, PhD, senior lecturer
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University*

ANALYSIS OF CORRELATION LINKS STOCHASTIC CHARACTERISTICS CONSTRUCTION

The paper presents some peculiarities of pair correlation coefficient. Grounded consideration interrelation elements in determining the probability of failure-free operation of building structures. Determined that the reliability of series-connected elements increases with consideration of the pair correlation. It is received to a formula of definition of the linearized function of probability of no-failure operation taking into account of coefficient of the generalized covariance, and also sedate dependence of probability of refusual of coefficient of pair correlation.

Keywords: correlation coefficient, the probability of failure, the probability of failure-free operation, the system element failure, dependence, independence.

Вступ. У сучасних умовах у центрі уваги проектувальників знаходяться питання безпеки будівельних конструкцій і споруд. З метою отримання більш надійних конструктивних систем існує необхідність урахування всіх складових внутрішніх і зовнішніх факторів роботи конструкцій. Необхідно відмітити, що реальні конструкції допускають резерв надійності одних елементів і недостатній рівень надійності інших, тому проблема отримання рівнонадійних конструкцій набуває все більшої актуальності. При аналізі надійності будівельних конструкцій потрібно враховувати ймовірнісну природу різних чинників, що впливають на характер їх роботи, і кореляційний зв'язок між окремими характеристиками конструкцій.

Огляд останніх джерел досліджень і публікацій. Питання врахування кореляційних залежностей у розрахунках надійності будівельних конструкцій детально наведено в роботах А.П. Кудзіса [1], С.Ф. Пічугіна [2]. Методам структурної надійності, аналізу відмов складних структурних систем із застосуванням у промисловому будівництві присвячені праці іноземних науковців, а саме Dan M. Frangopol [8] та Н. Furuta [9].

Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми. Не розв'язаною раніше частиною проблеми є те, що врахування кореляційного зв'язку між елементами при визначенні ймовірності відмови має ряд різнобічних підходів, які можна віднести до загальних. Існує твердження про врахування коефіцієнта кореляції від 0 до 1, який би він не був [3], що належить до класичної теорії ймовірності. Будівельні конструкції, особливо залізобетонні з великим розкидом розрахункових параметрів, не потрапляють у зону врахування кореляційного зв'язку при коефіцієнті кореляції, меншому ніж 0,7. Коефіцієнт узагальненої коваріації [1] має від'ємну залежність при кількості елементів, менше ніж 7, що, на нашу думку, не характерно для параметрів будівельних конструкцій. Тому об'єктивний аналіз та адекватне врахування кореляційного зв'язку при визначенні ймовірності відмови з урахуванням передумов залежності або незалежності елементів є досить актуальним питанням.

Постановка завдання. Метою роботи є аналіз урахування ймовірнісної роботи будівельних конструкцій та урахування можливого кореляційного зв'язку між розрахунковими параметрами деяких елементів конструкцій.

Основний матеріал і результати. Коефіцієнт лінійної кореляції Пірсона [3] призначений для розрахунку сили і напряму лінійної залежності між змінними характеристиками, які вимірюються в інтервальному або відносному масштабі. Якщо дві змінні знаходяться на координатному полі, то кожна пара значень відображає координати точок на цьому полі. Чим ближче точки до усередненої прямої, тим вищий коефіцієнт кореляції. Коефіцієнт кореляції є позитивним, коли X й Y збільшились (прямо пропорційно), і негативним для зворотного зв'язку. Отже, лінійний коефіцієнт кореляції спрацьовує тільки при лінійній залежності між змінними. Згідно з даними роботи [3] загальна формула визначення коефіцієнта кореляції виглядає так:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{(n-1) \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (1)$$

або

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{cov(x, y)}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}}, \quad (2)$$

де x_i, y_i – характеристики, що порівнюються; n – кількість змінних, які порівнюються; σ_x, σ_y – стандарти відхилення у вибірках порівняння.

Для спрощення розрахунку надалі використаємо перетворену формулу [4]

$$r_{xy} = \frac{n \sum (x_i \cdot y_i) - n \sum x_i \cdot \sum y_i}{\sqrt{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2) \cdot (n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2)}}. \quad (3)$$

Згідно з даними роботи [6] дисперсії суми незалежних величин представлені таким чином:

$$D(x + y) = D(x) + D(y). \quad (4)$$

У випадку, коли величини залежні, вираз (4) набуває іншого вигляду:

$$D(x \pm y) = D(x) + D(y) \pm 2 \text{cov}(x, y). \quad (5)$$

Наприклад: якщо значення коефіцієнта кореляції між змінними – 0,36, то це слабкий негативний зв'язок, і у багатьох випадках можна не брати його до уваги; якщо значення коефіцієнта кореляції дорівнює 0, то це випадок незв'язаних змінних; якщо значення коефіцієнта кореляції між змінними дорівнює 0,25, то це дуже слабка кореляція, й у більшості випадків ми не беремо її до уваги; якщо значення коефіцієнта кореляції між змінними дорівнює 0,75, то ця кореляція висока, і її необхідно враховувати; якщо значення коефіцієнта кореляції дорівнює 1, то змінні повністю зв'язані.

На основі результатів проведеного дослідження були визначені слабкі сторони застосування коефіцієнта парної кореляції: нестійкість до викидів; визначається тільки лінійна залежність, інші види залежності встановлюються тільки регресивним аналізом; визначається незалежність і некорельованість (але з першого виникає друге, а не навпаки).

Запропоновано для визначення лінійної кореляційної залежності застосовувати вибірковий (емпіричний) коефіцієнт парної кореляції

$$r_{xy}^e = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sqrt{(\overline{X^2} - (\bar{X})^2) \cdot (\overline{Y^2} - (\bar{Y})^2)}}. \quad (6)$$

При переході до розрахунку ймовірності безвідмовної роботи з урахуванням коефіцієнта парної кореляції між окремими елементами системи необхідно окреслити передумови проведеного дослідження.

Розглянемо попередні значення ймовірності відмови двох окремих елементів конструкції. За умови абсолютної залежності $r_{ij} = 1$ елементи необхідно замінити одним з максимальною ймовірністю відмови Q_{max} . Якщо елементи незалежні ($r_{ij} = 0$), то ймовірність відмови двох елементів одночасно знаходиться за такою формулою:

$$Q_{s\ ij}^n = 1 - P_{s\ ij}^n = 1 - P_i \cdot P_j = 1 - (1 - Q_i) \cdot (1 - Q_j). \quad (7)$$

Передбачимо лінійну залежність (у параметрах зміни парного коефіцієнта кореляції r_{ij} від 0 до 1) ймовірності відмови незалежних і залежних послідовно з'єднаних елементів. Треба відмітити, що коефіцієнт кореляції характеризує не будь-яку залежність, а тільки лінійну.

Рисунок 1 ілюструє трапецію, за допомогою якої обґрунтуємо твердження, що при коефіцієнті кореляції $r_{ij}=0$ елементи будуть незалежними, а при $r_{ij}=1$ ймовірність відмови системи буде дорівнювати ймовірності відмови будь-якого з двох елементів (за умови їх однакових чисельних значень) або максимальному значенню ймовірності відмови (за умови їх різних чисельних значень). Якщо коефіцієнт кореляції двох випадкових величин відмінний від нуля, то існує ознака залежності між ними.

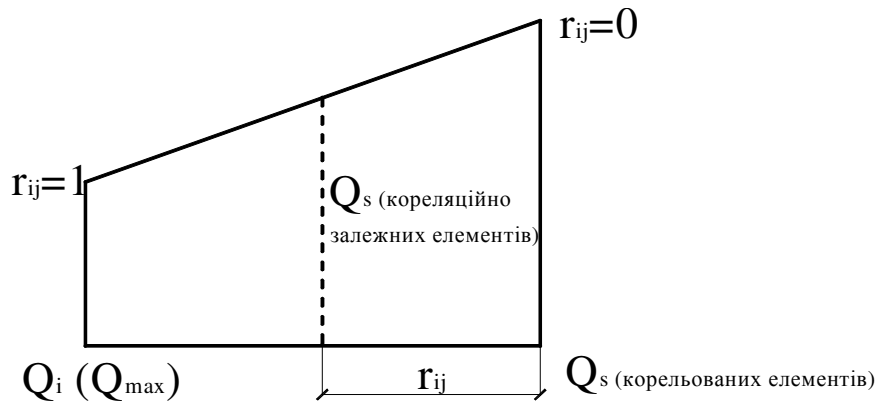


Рис. 1. Лінійна інтерполяція визначення ймовірності відмови системи послідовно з'єднаних корельованих елементів

Визначаємо ймовірність відмови залежних між собою послідовно з'єднаних двох елементів (Q_s^3) за лінійною інтерполяцією (рис. 1) та за такими формулами:

$$\text{за умови однакових } Q_i \text{ та } Q_j : Q_s^3 = Q_s^H - r_{ij}(Q_s^H - Q_i); \quad (8)$$

$$\text{за умови різних } Q_i \text{ і } Q_j : Q_s^3 = Q_s^H - r_{ij}(Q_s^H - Q_{max}), \quad (9)$$

де Q_i – ймовірність відмови i -го або j -го елемента конструкції;

Q_s^H – ймовірність відмови системи двох незалежних елементів конструкції;

Q_{max} – максимальна ймовірність відмови між i -м та j -м елементами конструкції.

У роботі [1] при нормальному законі розподілення композиційної функції, що характеризує працездатність елементів, була запропонована формула розрахунку коефіцієнта узагальненої коваріації.

Існує можливість розрахунку надійності системи конструкції з урахуванням кореляційного зв'язку для послідовно з'єднаних елементів [1]

$$P_s = \rho P_{i,min} + (1 - \rho) \prod_{i=1}^n P_i, \quad (10)$$

де $P_{i,min}$ – мінімальна надійність усіх i -х елементів конструкції;

P_i – надійність i -го елемента конструкції.

Спираючись на формулу (7), запишемо вираз для розрахунку ймовірності відмови системи двох послідовно з'єднаних елементів (які мають однакові ймовірності відмови) з урахуванням коефіцієнта узагальненої коваріації з подальшим відображенням

$$Q_s^3 = 1 - (\rho \cdot (1 - Q_i) + (1 - \rho) \cdot (1 - Q_i)^2). \quad (11)$$

Якщо перетворити функцію коефіцієнта узагальненої коваріації в лінійну за умови $\rho_{mi} = r_{ij}$, можна отримати такий вираз для двох елементів конструкції, для яких урахується міра взаємозв'язку:

$$\rho = r_{ij} \left\{ 2 - \left[r_{ij} + \frac{(1 - r_{ij})(2 - \log_2 n)}{1 - 0,1 r_{ij}^2 (2 - \log_2 n)^2} \right] \right\}. \quad (12)$$

Підставивши у формулу (12) $n = 2$, приведемо логарифмічну функцію до такого вигляду:

$$\rho = r_{ij} \left\{ 2 - \left[r_{ij} + \frac{(1 - r_{ij})}{1 - 0,1 r_{ij}^2} \right] \right\}. \quad (13)$$

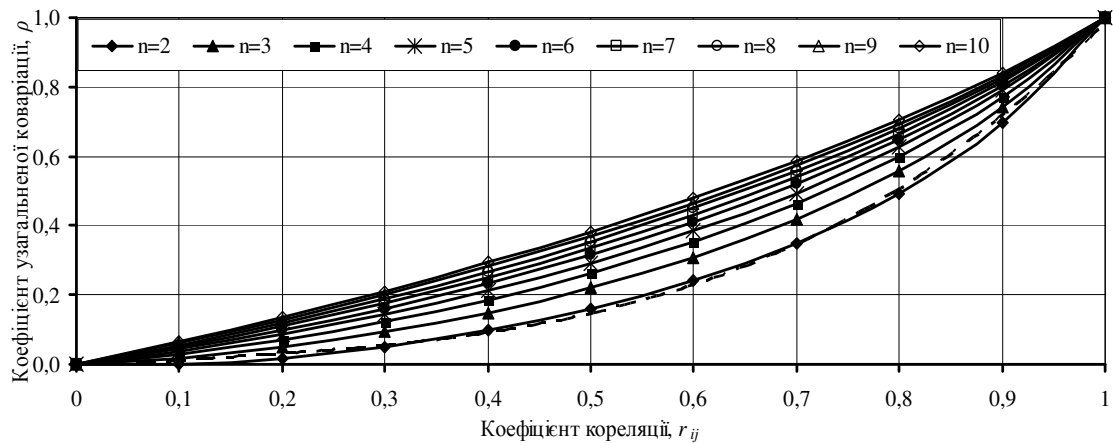


Рис. 2. Модифікована залежність узагальненого коефіцієнта коваріації від коефіцієнта парної кореляції:
— поліноміальний (n=2) $y = 1,3x^3 - 0,6x^2 + 0,3x - 0,01$

Запропонована залежність (13) при знаходженні ймовірності відмови системи двох взаємопов'язаних елементів Q_s^3 (11) від чисельного значення коефіцієнта кореляції r_{ij} в діапазоні заданих значень ймовірності відмови Q_i або Q_j від $1E-03$ до $1E-10$ (рис. 3) наблизиться до лінійного закону. Залежність (11) прийме логічно обумовлену форму, що враховує кореляційний зв'язок між двома небезпечними елементами. Треба відмітити, що вона повинна бути пропорційною до будь-якого коефіцієнта кореляції (від 0 до 1). Коефіцієнт узагальненої коваріації отримується близьким до коефіцієнта кореляції двох перерізів у випадку з однаковими ймовірностями відмови Q_i .

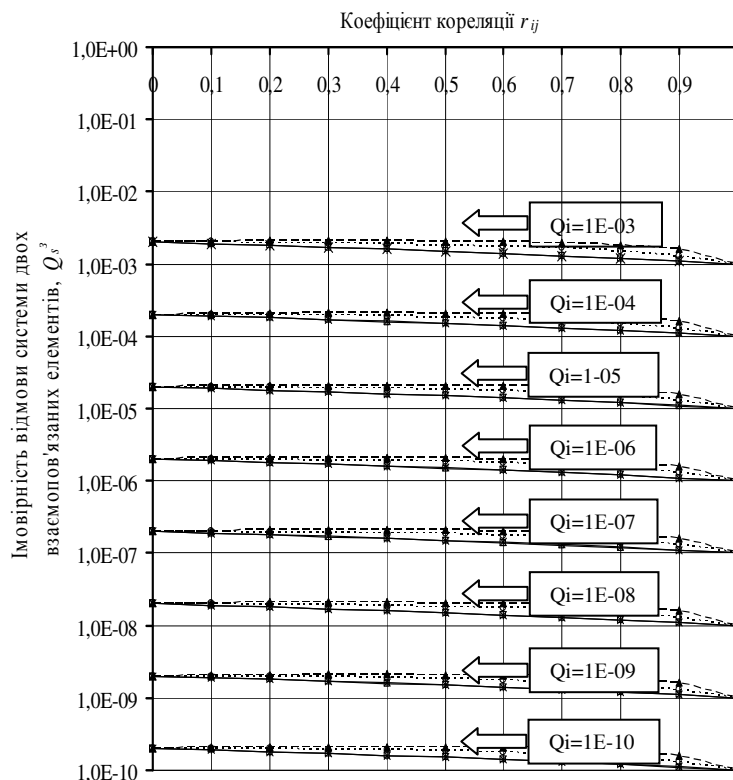


Рис. 3. Залежність ймовірності відмови системи двох взаємопов'язаних елементів Q_s^3 від коефіцієнта кореляції r_{ij} (— лінійна постановка; ---- степенева постановка)

Також була запропонована степенева функція визначення для послідовно з'єднаних елементів імовірності відмови системи двох елементів з урахуванням коефіцієнта парної кореляції r_{ij} для тих же передумов [5], які були наведені для лінійної постановки:

$$Q_s^3 = Q_s^n \cdot \left(\frac{Q_i}{Q_s^n} \right)^{r_{ij}}. \quad (14)$$

Виконавши дослідження відповідних залежностей, можна відмітити, що відхилення ймовірності відмови системи двох взаємопов'язаних елементів Q_s^3 за формулою (14) порівняно з виразом (11) сягають до 5,75% при $r_{ij} = 0,6$ з подальшим зменшенням відсотків похибки. Аналізуючи різницю наведених величин, можна спостерігати тенденцію до збільшення її чисельного значення до межі коефіцієнта кореляції $r_{ij} = 0,5$.

Висновки. У ході проведеного дослідження виявлено, що надійність системи послідовно з'єднаних елементів з урахуванням коефіцієнта кореляції збільшується. Отже, існує необхідність урахування кореляції, якщо вона існує ($r_{ik} \geq 0,4$) [5].

Література

1. Кудзис А.П. Оценка надежности железобетонных конструкций / А.П. Кудзис. – Вильнюс: Моклас, 1985. – 156 с.
2. Пичугин С.Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий: монография / С.Ф. Пичугин. – Полтава: ООО «АСМИ», 2009. – 452 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
4. Матвеева С.П. Теория вероятностей и элементы математической статистики / С.П. Матвеева. – М.: Воениздат, 1980. – 399 с.
5. Пичугин С.Ф. Врахування кореляційного зв'язку між елементами в оцінках надійності будівельних конструкцій / С.П. Пичугин, К.В. Чичуліна // Будівельні конструкції: зб. наук. праць. – Вип. 74: в 2-х кн. Книга 1. – К.: ДП НДІБК, 2011. – С. 386 – 394.
6. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / В.П. Сигорский. – К.: Техника, 1977. – 766 с.
7. Чичуліна К.В. Кореляційний зв'язок в економіко-математичних моделях / К.В. Чичуліна // Наукові праці Полтавської державної аграрної академії. Вип.1(4) – Т. 3. – Полтава: ПДАА. – 2012. – С. 250 – 255.
8. Dan M. Frangopol. Reliability and optimization of structural systems: assessment, design, and life-cycle performance : proceedings of the thirteenth IFIP WG 7.5/ Dan M. Frangopol, Mitsuo Kawatani , Chul-Woo Kim. Taylor & Francis // Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems Kobe, Japan, October 11 – 14 2006, 2007. – P. 269.
9. Hitoshi Furuta. Reliability and optimization of structural systems: proceedings of the 10th IFIP WG7.5 / H. Furuta, M. Sakano. Taylor & Francis // Working Conference on Reliability and optimization of structural systems, Osaka, Japan, 25 – 27 March, 2002, 2003. – P. 276.

Надійшла до редакції 22.12.2014
© В.П. Чичулін, К.В. Чичуліна